

De Arzelà–Ascoli a Donsker:

Compacidad y apretamiento en la convergencia débil.

Estudiante: Javier López de Lacalle Beltrán de Heredia.

Centro Asociado: 032000 - Vitoria-Gasteiz.

Director del trabajo: Dr. Tomás Prieto Rumeau.

23 de junio de 2026.

Objeto del trabajo.

- **Texto de referencia:**

Patrick Billingsley, 1999. *Convergence of Probability Measures*.

- **Objetivo:** Versión funcional del Teorema Central del Límite: Teorema de Donsker.
- **Cuestión central:** Criterio de **compacidad** en espacios de medidas de probabilidad.

Convergencia débil. $F_n \Rightarrow F$. $P_n \Rightarrow P$.

- Ejemplo: Teorema de De Moivre–Laplace.

$$F_n(x) := P_n \left\{ \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x \right\} \longrightarrow F(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du,$$

en todo punto de continuidad x de F . Se denota $F_n \Rightarrow F$.

- $F(x) = P((-\infty, x])$: F es continua en x si y sólo si $\{x\}$ tiene probabilidad nula en P .
- En términos de medidas de probabilidad, se dice $P_n \Rightarrow P$ cuando:

$$P_n(A) \longrightarrow P(A) \quad \text{si} \quad P(\partial A) = 0.$$

- Compatible con $A = \left\{ \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Portmanteau: Equivalencias convergencia débil.

- (i) $P_n \Rightarrow P$, i.e.: P_n converge débilmente a P , definida en cualquiera de las siguientes condiciones (ii) – (v).
- (ii) $P_n f := \int_S f dP_n \rightarrow \int_S f dP := P f$ para toda función real f acotada y uniformemente continua.
- (iii) $\limsup_n P_n F \leq P F$ para todo conjunto $F \in \mathcal{S}$ cerrado.
- (iv) $\liminf_n P_n G \geq P G$ para todo conjunto $G \in \mathcal{S}$ abierto.
- (v) $P_n(A) \rightarrow P(A)$ para todo conjunto $A \in \mathcal{S}$ tal que $P(\partial A) = 0$.

Espacio $D[0, 1]$. Funciones cadlag: continue à droite, limites à gauche.

- $D[0, 1]$ denota el espacio de funciones reales *cadlag* definidas en $[0, 1]$:
Existen los límites laterales izquierdos y son continuas por la derecha.
- Este es el **espacio natural para procesos con saltos**: Procesos de conteo, funciones de distribución empíricas, ...
- En §2.5 se analizan algunas propiedades:
 - $C[0, 1]$ en nunca denso en $D[0, 1]$.
 - El conjunto de puntos de discontinuidad es *pequeño en términos de cardinalidad*, y también *topológicamente pequeño*.

Métrica de Skorohod para espacio $D[0, 1]$.

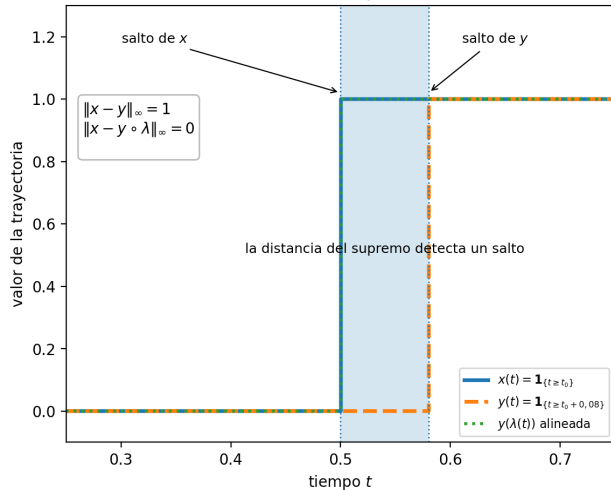
- La métrica del supremo es demasiado estricta para procesos con saltos.
- La métrica de Skorohod permite pequeñas *deformaciones* del tiempo:

$$d(x, y) = \inf_{\lambda} \{ \|\lambda - I\| \vee \|x - y \circ \lambda\| \}.$$

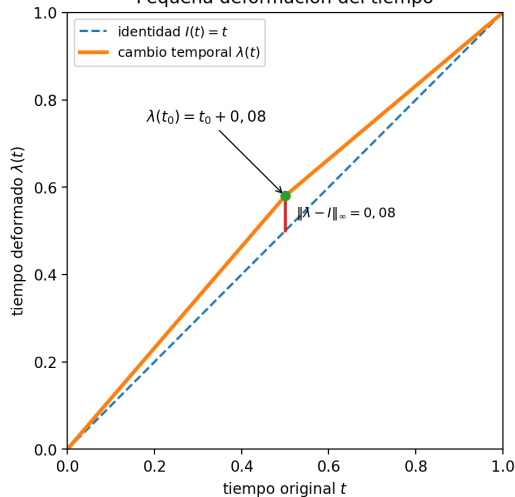
- Mediante pequeñas deformaciones en el tiempo, se evita que las traslaciones en el momento en que se producen los saltos impidan la convergencia.
- §2.5.1: La métrica de Skorohod ignora discrepancias en puntos de discontinuidad.

Métrica de Skorohod.

Dos saltos desplazados



Pequeña deformación del tiempo



Módulo de continuidad. Funciones continuas.

El **módulo de continuidad** de una función x es una aplicación

$$w_x(\delta) : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$$

que proporciona una forma de cuantificar el grado de continuidad de x .

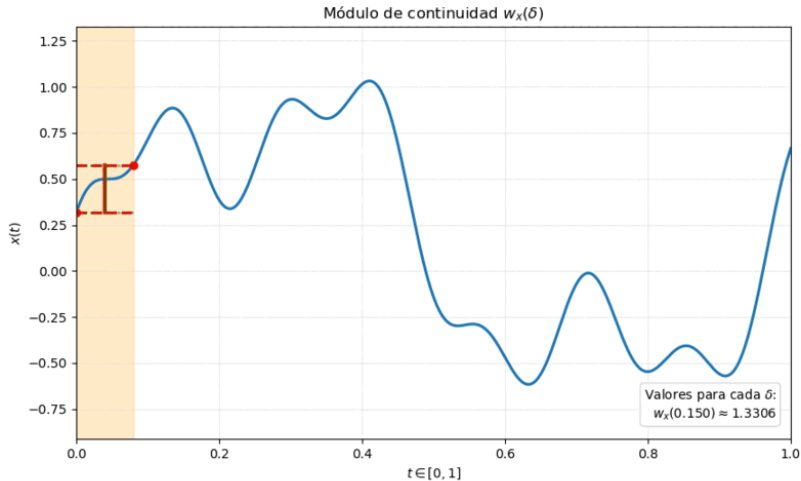
- Para $x \in C[0, 1]$ se define:

$$w(x, \delta) \equiv w_x(\delta) = \sup_{|s-t| \leq \delta} |x(s) - x(t)|, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

- x es uniformemente continua si y sólo si $\lim_{\delta \rightarrow 0} w(x, \delta) = 0$
- Una familia A de funciones de $C[0, 1]$ es **uniformemente equicontinua** si y sólo si:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w_x(\delta) = 0.$$

Módulo de continuidad. Funciones continuas.



Módulo de continuidad. Funciones cadlag.

- En el espacio $D[0, 1]$ de funciones cadlag, los saltos imponen una cota inferior positiva a $w_x(\delta)$ y éste no puede decrecer a 0.
- Se definen en su lugar dos módulos de continuidad:

$$w'(x, \delta) \equiv w'_x(\delta) = \inf_{\{t_i\} \text{ } \delta\text{-sparse}} \max_{1 \leq i \leq v} w_x[t_{i-1}, t_i], \quad 0 < \delta < 1,$$

$$w''(x, \delta) \equiv w''_x(\delta) = \sup_{\substack{t_1 \leq t \leq t_2 \\ t_2 - t_1 \leq \delta}} \{|x(t) - x(t_1)| \wedge |x(t_2) - x(t)|\}, \quad 0 < \delta < 1.$$

Estrategia para demostrar convergencia débil.

Convergencia distribuciones finito-dimensionales



Convergencia débil

Sin embargo:

Convergencia distribuciones finito-dimensionales

+

Compacidad relativa



Convergencia débil, i.e.: $P_n \Rightarrow P$.

Teorema de Prohorov:

Apretamiento $\Rightarrow$ Compacidad relativa.

Caracterización de la compacidad relativa.

- **Espacio $C[0,1]$:** La clausura de conjunto $A \subset C[0,1]$ es compacta si y sólo si es *puntualmente acotado y equicontinuo*. Equivalentemente:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} |x(0)| < \infty, & \quad \text{órbitas en } t = 0 \text{ acotadas,} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w_x(\delta) = 0, & \quad \text{equicontinuidad uniforme.} \end{aligned}$$

- **Espacio $D[0,1]$:** Un conjunto $A \subseteq D[0,1]$ es relativamente compacto si y sólo si:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in A} \|x\| < \infty, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{x \in A} w'_x(\delta) = 0. \end{aligned}$$

Caracterización del apretamiento.

- **Espacio $C[0,1]$:** Sea $\{P_n\}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $(C, \mathcal{C})$. La sucesión $\{P_n\}$ es apretada si y sólo si se satisfacen:

(i) $\forall \eta > 0$, existen a y n_0 tales que

$$P_n[x : |x(0)| \geq a] \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

(ii) $\forall \epsilon > 0$ y $\eta > 0$, existen $\delta \in [0, 1]$ y n_0 tales que

$$P_n[x : w_x(\delta) \geq \epsilon] \leq \eta, \quad n \geq n_0.$$

- **Espacio $D[0,1]$:** Sea $\{P_n\}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $(D, \mathcal{D})$. La sucesión $\{P_n\}$ es apretada si y sólo si se satisfacen:

$$(i) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \limsup_n P_n(x : \|x\| \geq a) = 0.$$

$$(ii) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \lim_{\delta} \limsup_n P_n(x : w'_x(\delta) \geq \epsilon) = 0.$$

Variables aleatorias y su distribución.

Una **variable aleatoria** X es una aplicación medible:

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (S, \mathcal{S}).$$

La **distribución** de X es la medida de probabilidad:

$$P = PX^{-1}$$

en $(S, \mathcal{S})$, dada por

$$P(A) = P\left(X^{-1}A\right) = P\left(\omega : X(\omega) \in A\right) = P\left(X \in A\right), \quad A \in \mathcal{S}.$$

Convergencia débil de variables aleatorias.

- **Espacio $C[0,1]$:** Si se satisface:

- 1 Para todo $t_1, \dots, t_k$ se satisface $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$.
- 2 Para $\epsilon \geq 0$ $\lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P[w(X^n, \delta) \geq \epsilon] = 0$.

Entonces $X^n \Rightarrow_n X$.

- **Espacio $D[0,1]$:** Se denota $T_X := T_P$, donde P es la distribución de X .

- 1 Si para $t_i \in T_X$ $(X_{t_1}^n, \dots, X_{t_k}^n) \Rightarrow_n (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$.
- 2 $X_1 - X_{1-\delta} \Rightarrow_{\delta \rightarrow 0} 0$.
- 3 Para $r \leq s \leq t, n \geq 1$ y $\lambda > 0$: $P[|X_s^n - X_r^n| \wedge |X_t^n - X_s^n| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^{4\beta}} [F(t) - F(r)]^{2\alpha}$.

Entonces $X^n \Rightarrow_n X$.

Teorema de Donsker.

Sean $Z_1, Z_2, \dots$ variables aleatorias i.i.d. con media 0 y varianza σ^2 constante:

- **Espacio $C[0,1]$:** Se define el proceso poligonal de sumas parciales:

$$\tilde{X}_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(S_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor) Z_{\lfloor nt \rfloor + 1} \right).$$

Se cumple:

$$\tilde{X}_n \Rightarrow W \equiv \text{proceso Browniano estándar.}$$

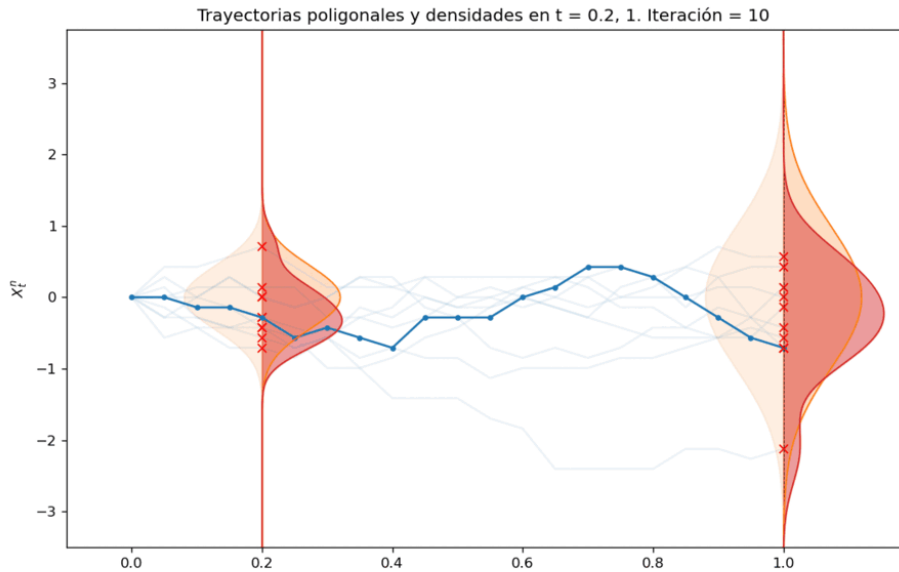
- **Espacio $D[0,1]$:** Se define el proceso escalonado de sumas parciales:

$$X_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}.$$

Se cumple:

$$X_n \Rightarrow W \equiv \text{proceso Browniano estándar.}$$

Teorema funcional del límite.



Conclusiones y trabajo futuro.

- Se ha estudiado la convergencia débil en los espacios métricos de trayectorias $C[0, 1]$ y $D[0, 1]$.
- En estos espacios podemos identificar el límite de sucesiones de variables aleatorias a partir de las distribuciones finito-dimensionales. Si la sucesión de medidas de probabilidad es suficientemente compacta (apretada) esto asegura la sucesión completa converge al límite identificado.
- Una vez familiarizados con la convergencia débil y apretamiento podemos abordar la convergencia de otros procesos más allá de sumas parciales.
- La teoría general de convergencia débil es aplicable a procesos empíricos.
- Existen otros criterios de apretamiento (tiempos de parada, martingalas).

Gracias por la atención.

Preguntas y comentarios.